

Skript zum
Brückenkurs Mathematik
für Studierende der Mathematik und Informatik and der Uni Mainz
mit KI-Hilfe digitalisierten Vorlesungsnotizen

Dr. Anton Malevich

Letze Aktualisierung am 25. September 2026

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
1.1	Allgemeine Hinweise zum Lernen im Mathematikstudium	3
1.2	KI bewusst nutzen	4
1.3	Wie kann man Spaß an Mathematik finden?	9
1.4	Interessante Aufgaben	10

Tag 1

Einführung

1.1 Allgemeine Hinweise zum Lernen im Mathematikstudium

Für das Studium der Mathematik ist es wichtig, sich früh an die Arbeitsweise an der Universität zu gewöhnen. Vieles funktioniert anders als in der Schule: Man bekommt nicht alles fertig erklärt und eingeübt, sondern muss selbst aktiv werden. Die folgenden Punkte sollen helfen, den Einstieg besser zu verstehen und den Brückenkurs sinnvoll zu nutzen.

- Wissen wird nicht mehr einfach gefüttert: An der Universität wird Wissen nicht mehr Schritt für Schritt so aufbereitet, dass man es nur noch aufnehmen muss. Studierende müssen aktiv mitdenken, nachfragen, nacharbeiten und versuchen, das Wissen aus Vorlesungen, Übungen, Büchern und Gesprächen selbst herauszuholen.
- Lernen heißt Üben: Mathematik versteht man nicht allein durch Zuhören oder Lesen. Man muss selbst Aufgaben rechnen, Ansätze ausprobieren und überprüfen, ob man die Ideen wirklich anwenden kann.
- Eigenverantwortung übernehmen: Jede Person muss selbst einschätzen, ob der eigene Wissensstand ausreicht oder ob mehr Übung nötig ist. Die Klausur zeigt zwar am Ende, ob die Grundlagen sitzen, aber wenn man das erst dort merkt, ist es meistens zu spät.
- Der Brückenkurs ist ein Selbsthilfekurs: Der Brückenkurs soll nicht alle Probleme automatisch lösen. Er hilft dabei, Lücken zu erkennen, wichtige Grundlagen zu wiederholen und herauszufinden, woran man selbst weiterarbeiten muss.
- Frühzeitig planen: Der Zeitplan für das Semester ist bereits bekannt. Deshalb sollte man jetzt schon klären, welche Veranstaltungen man besuchen

wird und welche Vorkenntnisse dafür wichtig sind. So kann man sich gezielt vorbereiten.

- Wochenablauf an der Universität verstehen: Eine typische Woche besteht nicht nur aus Vorlesungen. Dazu kommen Übungen, Tutorien, Nachbereitung, Hausaufgaben, Lerngruppen und eigenständiges Wiederholen. Gerade in Mathematik ist die Zeit außerhalb der Vorlesung entscheidend.

1.2 KI bewusst nutzen

Künstliche Intelligenz kann beim Lernen sehr hilfreich sein. Sie kann Begriffe erklären, Beispiele erzeugen, Zusammenfassungen schreiben, Rechenwege kommentieren oder auf mögliche Fehler hinweisen. Richtig eingesetzt ist KI also ein gutes Werkzeug, um das eigene Verständnis zu verbessern.

Wichtig ist aber: KI darf die eigene Arbeit nicht ersetzen. Wer Aufgaben nur von einer KI lösen lässt und die Lösung anschließend abschreibt, übt nicht selbst. Dann entsteht leicht der Eindruck, man habe den Stoff verstanden, obwohl man die entscheidenden Schritte nicht selbst ausführen kann.

Gerade in der Mathematik ist das besonders problematisch. Man lernt Mathematik nicht dadurch, dass man fertige Lösungen liest. Man lernt Mathematik vor allem dadurch, dass man selbst versucht, ein Problem zu lösen, dabei Fehler macht, diese Fehler untersucht und den eigenen Lösungsweg verbessert.

In letzter Zeit werden häufig Lösungen abgegeben, die offensichtlich von KI erzeugt wurden. Teilweise werden dabei auch sehr grobe Fehler einfach übernommen. Das zeigt, dass die Lösung nicht kritisch geprüft wurde. Manchmal tauchen auch Begriffe, Methoden oder Notationen auf, die in der Vorlesung noch gar nicht eingeführt oder verwendet wurden. Auch daran erkennt man, dass nicht wirklich mit dem eigenen Vorlesungsstoff gearbeitet wurde.

Für das Lernen ist das gefährlich. Eine KI kann zwar oft eine richtige Lösung erzeugen, aber in der Klausur muss man selbst entscheiden, welcher Ansatz passt, welche Umformung erlaubt ist und wie die Rechnung sauber durchgeführt wird. Genau diese Fähigkeiten entstehen nur durch eigenes Üben.

Deshalb gibt es mittlerweile an vielen Stellen kaum noch Punkte für Hausaufgaben. Der Grund ist nicht, dass Hausaufgaben unwichtig wären. Im Gegenteil: Hausaufgaben sind für das Lernen sehr wichtig. Aber als Leistungsnachweis sind sie schwieriger geworden, weil KI viele Aufgaben lösen kann. Die Zulassung zur Klausur wird deshalb häufig eher über Zwischentests, Kurztests oder andere Formate geregelt, bei denen das eigene Können direkter sichtbar wird.

Nutzen Sie KI daher nicht als Ersatz für das Denken, sondern als Unterstützung beim Denken. Sinnvoll ist zum Beispiel:

- zuerst selbst einen Lösungsversuch aufzuschreiben,

- danach gezielt nach einer Erklärung zu einem unklaren Schritt zu fragen,
- eine eigene Lösung auf Fehler prüfen zu lassen,
- sich ein ähnliches Beispiel geben zu lassen,
- sich einen Begriff noch einmal einfacher erklären zu lassen.

Weniger sinnvoll ist:

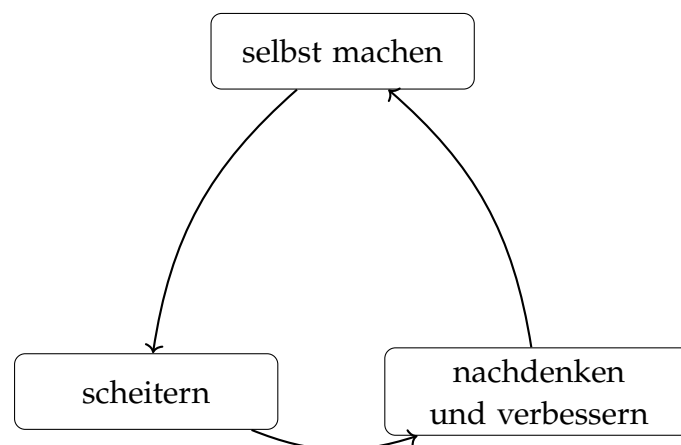
- die Aufgabe direkt vollständig lösen zu lassen,
- eine Lösung ohne Prüfung abzuschreiben,
- Rechenschritte zu übernehmen, die man selbst nicht erklären kann,
- Notation oder Methoden zu verwenden, die im Kurs noch gar nicht vorkamen.

Eine gute Kontrollfrage lautet immer:

Kann ich diesen Schritt selbst erklären?

Wenn die Antwort nein ist, dann ist die Lösung für das eigene Lernen noch nicht ausreichend.

Machen Sie sich das Lernen nicht dadurch kaputt, dass Sie schwierige Schritte sofort auslagern. Man lernt sehr viel durch das wiederholte Anwenden desselben Grundschemas:



Genau dieser Prozess ist nicht immer angenehm, aber er ist der eigentliche Lernprozess. Das kennt man auch aus vielen anderen Bereichen: Fahrradfahren lernt man nicht durch Zuschauen, Schuhe binden nicht durch eine Erklärung allein, und ein Handwerk lernt man nicht, indem jemand anderes die Arbeit übernimmt. Man muss es selbst versuchen, Fehler machen, darüber nachdenken und es erneut probieren.

Genauso ist es in der Mathematik. Eine Aufgabe selbst zu bearbeiten ist oft mühsam, aber gerade dadurch entsteht Verständnis. Künstliche Intelligenz kann dabei helfen, zum Beispiel indem sie einen Hinweis gibt, eine Definition anders erklärt oder einen Fehler sichtbar macht. Sie sollte aber nicht die eigene Arbeit ersetzen. Wer den schwierigen Teil immer sofort abgibt, überspringt genau den Teil, in dem Lernen stattfindet.

Tipps von KI für den Umgang mit KI beim Lernen

Die folgenden Hinweise stammen von COPILOT.

1. Gute Nutzung von KI

- **Begriffe erklären lassen.**

Wenn ein Begriff unklar ist, kann KI hilfreich sein. Zum Beispiel kann man fragen:

```
Erkläre mir den Unterschied zwischen notwendiger  
und hinreichender Bedingung.
```

Danach sollte man selbst prüfen, ob die Erklärung zur Vorlesung passt. Außerdem sollte man den Begriff an eigenen Beispielen anwenden.

- **Hinweise statt vollständiger Lösungen erfragen.**

Sehr sinnvoll ist es, nicht sofort nach der ganzen Lösung zu fragen, sondern nur nach einem kleinen Hinweis:

```
Gib mir nur einen ersten Tipp,  
aber löse die Aufgabe nicht vollständig.
```

So bleibt die eigentliche Denkarbeit bei einem selbst. Genau diese Denkarbeit ist für das Lernen entscheidend.

- **Eigene Lösungen überprüfen lassen.**

Man kann zuerst selbst rechnen und danach die eigene Lösung überprüfen lassen:

```
Ich habe diese Lösung versucht.  
Wo könnte ein Fehler sein?  
Bitte löse die Aufgabe nicht neu.
```

Das ist deutlich besser, als die Aufgabe direkt lösen zu lassen. Denn vorher hat man bereits selbst versucht, einen Lösungsweg zu finden.

- **Ähnliche Aufgaben erzeugen lassen.**

Wenn man eine Aufgabe verstanden hat, kann man KI bitten, ähnliche Übungsaufgaben zu erstellen:

Gib mir drei ähnliche Aufgaben,
aber ohne Lösung.

Danach kann man die Aufgaben selbst bearbeiten. So wird KI zu einem Übungspartner und nicht zu einem Ersatz für die eigene Arbeit.

- **Fehler erklären lassen.**

Wenn ein Fehler gefunden wurde, kann KI helfen, diesen Fehler zu verstehen:

Warum ist dieser Schritt falsch?
Erkläre es mir bitte an einem einfachen Beispiel.

Das ist oft wertvoller als nur die richtige Lösung zu sehen. Wer den eigenen Fehler versteht, macht ihn beim nächsten Mal seltener.

- **Notation klären.**

KI kann helfen, mathematische Schreibweisen in einfachen Worten zu erklären:

Was bedeutet diese Schreibweise?
Erkläre sie bitte in einfachen Worten.

Dabei gilt aber: Die Notation aus der Vorlesung ist maßgeblich. Wenn KI eine andere Schreibweise verwendet, sollte man sie nicht ungeprüft übernehmen.

- **Zusammenfassungen nach eigener Arbeit erstellen lassen.**

Nach dem Bearbeiten eines Themas kann KI helfen, die wichtigsten Ideen zu ordnen:

Fasse die wichtigsten Ideen zu Extremwertaufgaben
kurz und übersichtlich zusammen.

Eine solche Zusammenfassung ersetzt aber nicht das Rechnen. Sie hilft nur dabei, den Stoff nachträglich zu strukturieren.

2. Problematische Nutzung von KI

- **Lösungen abschreiben.**

Nicht sinnvoll ist es, eine Aufgabe vollständig lösen zu lassen und die Antwort einfach zu übernehmen. Dann hat man vielleicht eine fertige Lösung, aber kein eigenes Können aufgebaut. In der Klausur hilft das nicht.

- **Unverstandene Schritte übernehmen.**

Auch wenn eine KI-Lösung richtig aussieht, kann sie Schritte enthalten, die man selbst nicht erklären kann. Solche Schritte sollte man nicht übernehmen.

Eine einfache Regel lautet:

Was ich nicht erklären kann, gehört nicht in meine Lösung.

- **Zu hohe Methoden verwenden.**

Manchmal verwendet KI Methoden, die in der Vorlesung noch nicht behandelt wurden. Das kann auffällig sein und ist außerdem didaktisch nicht sinnvoll. Ziel ist nicht irgendeine Lösung, sondern eine Lösung mit den Mitteln, die im Kurs gelernt werden.

- **Falsche Sicherheit.**

KI formuliert oft sehr überzeugend, auch wenn eine Lösung falsch ist. Dadurch kann eine gefährliche Sicherheit entstehen. Rechenschritte, Voraussetzungen und Ergebnisse müssen deshalb immer kritisch geprüft werden.

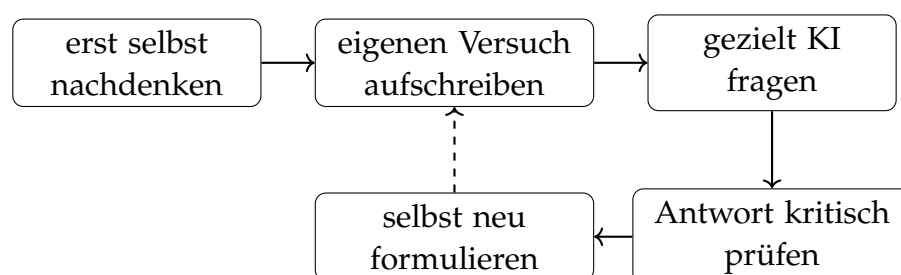
- **Rechnen ohne Verständnis.**

Eine KI kann viele Rechnungen schnell ausführen. Das bedeutet aber nicht, dass man selbst verstanden hat, warum diese Rechnung gemacht wird. In mathematischen Aufgaben ist die Wahl des richtigen Ansatzes oft genauso wichtig wie das Rechnen selbst.

3. Praktische Tipps

- **Erst Kopf, dann KI.**

Eine sinnvolle Reihenfolge ist:



So bleibt KI ein Werkzeug und wird nicht zur Ausrede, die eigene Arbeit zu vermeiden. Die Antwort der KI wird nicht einfach übernommen, sondern zuerst überprüft und danach in eigenen Worten sauber aufgeschrieben.

- **Die Lösung selbst reproduzieren.**

Nach jeder KI-Hilfe sollte man die Lösung noch einmal ohne KI selbst aufschreiben. Wenn das gelingt, war die Hilfe wahrscheinlich sinnvoll. Wenn das nicht gelingt, wurde die Lösung noch nicht wirklich verstanden.

- **Kleine Fragen statt großer Auftrag.**

Besser als diese Frage:

Löse diese Aufgabe.

sind kleine, gezielte Fragen wie:

Warum darf man hier quadrieren?

oder:

Welche Bedingung muss ich nach dem Quadrieren prüfen?

Kleine Fragen fördern das Verständnis deutlich stärker als fertige Komplettlösungen.

- **Eigenständigkeit als Ziel.**

Das Ziel ist nicht, möglichst schnell perfekte Lösungen zu produzieren. Das Ziel ist, mathematisch arbeitsfähig zu werden. Dazu gehört, Aufgaben selbst zu beginnen, Fehler auszuhalten, Fragen zu stellen und den eigenen Lösungsweg zu verbessern.

1.3 Wie kann man Spaß an Mathematik finden?

Mathematik kann besonders dann Freude machen, wenn man sie nicht nur als Pflichtfach oder Rechentechnik sieht. Interessant wird Mathematik oft dort, wo man selbst Zusammenhänge entdeckt, eigene Ideen ausprobiert und merkt, dass man ein Problem wirklich verstanden hat.

- Erfolgserlebnisse wahrnehmen: Es motiviert sehr, wenn man merkt, dass man ein Problem Schritt für Schritt besser versteht und schließlich selbst lösen kann.

- Der Weg ist das Ziel: In der Mathematik zählt nicht nur das Ergebnis. Auch falsche Ansätze, Umwege und neue Versuche gehören dazu und helfen beim Verstehen.
- Mathematik als Puzzle sehen: Viele Aufgaben bestehen daraus, passende Ideen zu finden, verschiedene Methoden auszuprobieren und am Ende zu erkennen, wie die einzelnen Teile zusammenpassen.
- Zusammenhänge entdecken: Besonders spannend wird Mathematik, wenn man versteht, warum Begriffe, Sätze oder Methoden miteinander verbunden sind.
- Beispiele und Gegenbeispiele suchen: Abstrakte Definitionen werden oft erst durch konkrete Beispiele verständlich. Gegenbeispiele zeigen außerdem, wo eine Aussage nicht mehr gilt.
- Überraschungen zulassen: Paradoxa, unerwartete Ergebnisse und ungewöhnliche Fragen zeigen, dass Mathematik lebendig ist und nicht immer so funktioniert, wie man zuerst denkt.
- Gemeinsam arbeiten: Im Austausch mit anderen entstehen oft neue Ideen. Außerdem merkt man, dass Schwierigkeiten normal sind und gemeinsam leichter überwunden werden können.
- Bezüge zur realen Welt finden: Viele mathematische Ideen tauchen in Natur, Technik, Informatik, Wirtschaft oder anderen Wissenschaften wieder auf. Solche Verbindungen können helfen, abstrakte Inhalte greifbarer zu machen.

1.4 Interessante Aufgaben

(1.1) Beispiel. Ein Krokodil möchte ein Zebra erreichen, das sich auf der anderen Seite eines Flusses befindet. Der Fluss ist 6 m breit und hat keine Strömung. Das Zebra steht am gegenüberliegenden Ufer, aber nicht direkt gegenüber dem Krokodil, sondern 20 m weiter flussaufwärts.

Das Krokodil kann an Land mit der Geschwindigkeit v m/s laufen und im Wasser mit der Geschwindigkeit w m/s schwimmen. Dabei gilt $v > w$.

Gesucht ist der schnellste Weg zum Zebra. Das Krokodil muss also entscheiden, wie weit es zuerst am Ufer entlangläuft und an welcher Stelle es ins Wasser geht.

Wir beschreiben den Weg des Krokodils durch die Variable x mit

$$0 \leq x \leq 20.$$

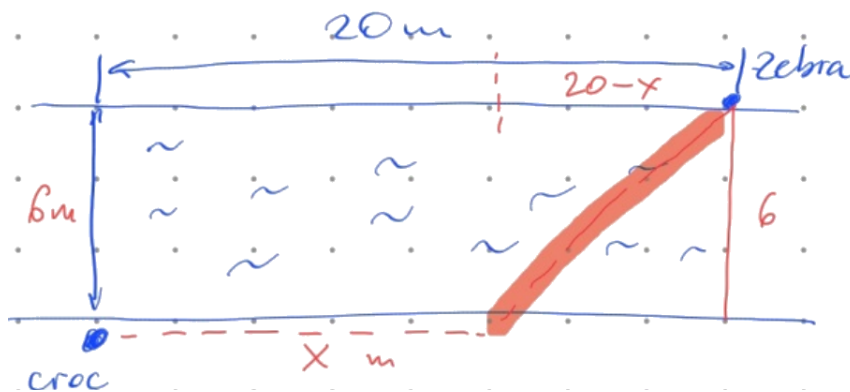


Abbildung 1.1: Skizze zur Frage: Welchen Weg sollte das Krokodil wählen, um das Zebra möglichst schnell zu erreichen?

Dabei ist x die Strecke, die das Krokodil zuerst an Land läuft. Danach schwimmt das Krokodil schräg durch den Fluss zum Zebra. Die gesamte benötigte Zeit hängt also von der Wahl von x ab. Ziel ist es, x so zu wählen, dass die Gesamtzeit möglichst klein wird.

Nun fragen wir uns, für welche Funktion das Minimum gesucht wird.

Die Gesamtzeit setzt sich aus der Zeit an Land und der Zeit im Wasser zusammen:

$$f(x) = \underbrace{\frac{x}{v}}_{\text{Zeit an Land}} + \underbrace{\frac{1}{w} \sqrt{(20-x)^2 + 6^2}}_{\text{Zeit im Wasser}} \quad (\text{s}).$$

Gesucht ist also das Minimum von f auf dem Intervall

$$0 \leq x \leq 20.$$

Sei ab jetzt konkret

$$v = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad w = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Wir klären zuerst, wie lange das Krokodil braucht, wenn es

- nur schwimmt;
- zuerst 20 m an Land läuft und dann 6 m senkrecht durch den Fluss schwimmt.

Erst danach werden wir uns der Frage c) widmen, was die mögliche minimale Gesamtzeit ist. ◁

Lösung. Wir betrachten zuerst die Randpunkte. So kann man später vergleichen, ob der gefundene kritische Punkt tatsächlich eine bessere Zeit liefert.

a) Für $x = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{\sqrt{(20-0)^2 + 6^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{20^2 + 6^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{400 + 36}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{436}}{2} \\ &\approx \frac{20,88}{2} \\ &= 10,44 \text{ s.} \end{aligned}$$

b) Für $x = 20$ gilt:

$$\begin{aligned} f(20) &= \frac{20}{2,5} + \frac{\sqrt{(20-20)^2 + 6^2}}{2} \\ &= \frac{40}{5} + \frac{6}{2} \\ &= 8 + 3 \\ &= 11 \text{ s.} \end{aligned}$$

c) Nun bestimmen wir die Ableitung, um mögliche Extremstellen im Inneren des Intervalls zu finden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2,5} + \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{(20-x)^2 + 6^2} \right)' \\ &= \frac{1}{2,5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x-20}{\sqrt{(20-x)^2 + 6^2}}. \end{aligned}$$

Nebenrechnung (Ableitung der Wurzel).

$$\begin{aligned} \left[\sqrt{(20-x)^2 + 6^2} \right]' &= \left[((20-x)^2 + 6^2)^{1/2} \right]' \\ &= \frac{1}{2} \cdot ((20-x)^2 + 6^2)^{-1/2} \cdot 2(20-x) \cdot (-1) \\ &= \frac{x-20}{\sqrt{(20-x)^2 + 6^2}} \end{aligned}$$

Für eine mögliche Extremstelle setzen wir $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} + \frac{x-20}{2\sqrt{(20-x)^2 + 6^2}} &= 0 \\ \frac{x-20}{2\sqrt{(20-x)^2 + 6^2}} &= -\frac{2}{5} \\ x-20 &= -\frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{(20-x)^2 + 6^2}.\end{aligned}$$

Um den Wurzelausdruck auf der rechten Seite zu beseitigen, quadrieren wir. (Dabei können allerdings möglicherweise neue Lösungen entstehen, die die Originalgleichung nicht Lösen!)

$$\begin{aligned}(x-20)^2 &= \frac{16}{25} \left((20-x)^2 + 6^2 \right) \\ (x-20)^2 - \frac{16}{25}(20-x)^2 &= \frac{16 \cdot 6^2}{25}.\end{aligned}$$

Wegen $(20-x)^2 = (x-20)^2$ folgt:

$$\begin{aligned}(x-20)^2 - \frac{16}{25}(x-20)^2 &= \frac{16 \cdot 36}{25} \\ (x-20)^2 \cdot \frac{9}{25} &= \frac{16 \cdot 36}{25} \\ (x-20)^2 &= \frac{16 \cdot 36}{9} \\ (x-20)^2 &= 64 \\ x-20 &= \pm\sqrt{64} \\ x-20 &= \pm 8.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$x = 28 \quad \text{oder} \quad x = 12.$$

Da in der Aufgabe nur Werte im betrachteten Bereich $0 \leq x \leq 20$ sinnvoll sind, scheidet $x = 28$ aus. Es bleibt also:

$$x = 12.$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}
 f(12) &= 12 \cdot \frac{1}{2,5} + \frac{\sqrt{(20-12)^2 + 6^2}}{2} \\
 &= \frac{12}{2,5} + \frac{\sqrt{8^2 + 6^2}}{2} \\
 &= 4,8 + \frac{\sqrt{64 + 36}}{2} \\
 &= 4,8 + \frac{10}{2} \\
 &= 4,8 + 5 \\
 &= 9,8 \text{ s.}
 \end{aligned}$$

Da $f(12) = 9,8 \text{ s}$ kleiner ist als die Randwerte $f(0) = 10,44 \text{ s}$ und $f(20) = 11 \text{ s}$, ist die minimale Zeit bei

$$x = 12$$

erreicht. (Überlegen Sie gern, warum das hier ausreicht, und kein weiterer Test, z.B. mit der zweiten Ableitung, notwendig ist.)

□

Für diese Lösung werden mehrere bekannte Inhalte aus der Schulmathematik verwendet. Die wichtigsten Punkte sind:

- **Physikalische Grundformeln:** Es wird der Zusammenhang zwischen Zeit, Strecke und Geschwindigkeit verwendet:

$$t = \frac{s}{v}.$$

Damit kann die benötigte Zeit für die einzelnen Streckenabschnitte berechnet werden.

- **Satz des Pythagoras:** Die schräge Strecke wird mit dem Satz des Pythagoras bestimmt. Aus den beiden Katheten $20 - x$ und 6 ergibt sich die Länge

$$\sqrt{(20 - x)^2 + 6^2}.$$

- **Funktionen ableiten:** Um die minimale Zeit zu finden, wird die Zeitfunktion abgeleitet. Dabei braucht man insbesondere die Kettenregel für Wurzelfunktionen, also zum Beispiel

$$\left(\sqrt{g(x)} \right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}.$$

- **Extremstellen und Optimierung:** Die optimale Stelle wird gefunden, indem man die Ableitung gleich null setzt:

$$f'(x) = 0.$$

So bestimmt man mögliche Extremstellen. Anschließend werden diese mit den Randwerten verglichen.

- **Gleichungen umformen:** Beim Lösen der Gleichung werden verschiedene Umformungen verwendet. Dabei ist wichtig, dass nicht jede Umformung automatisch eine äquivalente Gleichung liefert. Bei einer äquivalenten Umformung bleibt die Lösungsmenge unverändert.

Manche Umformungen können zusätzliche Lösungen erzeugen. Das passiert zum Beispiel beim Quadrieren:

$$a = b \implies a^2 = b^2.$$

Die umgekehrte Richtung gilt aber nicht immer, denn aus

$$a^2 = b^2$$

folgt nur

$$a = b \quad \text{oder} \quad a = -b.$$

Deshalb muss man nach dem Quadrieren die gefundenen Lösungen unbedingt in die ursprüngliche Gleichung einsetzen und überprüfen.

Andere Umformungen können Lösungen verlieren. Das kann zum Beispiel passieren, wenn man durch einen Term teilt, der auch Null sein kann. Teilt man durch diesen Term, dann geht der Fall verloren, in dem der Term gleich Null ist.

(1.2) Beispiel. Die Eckpunkte des Dreiecks Δ sind

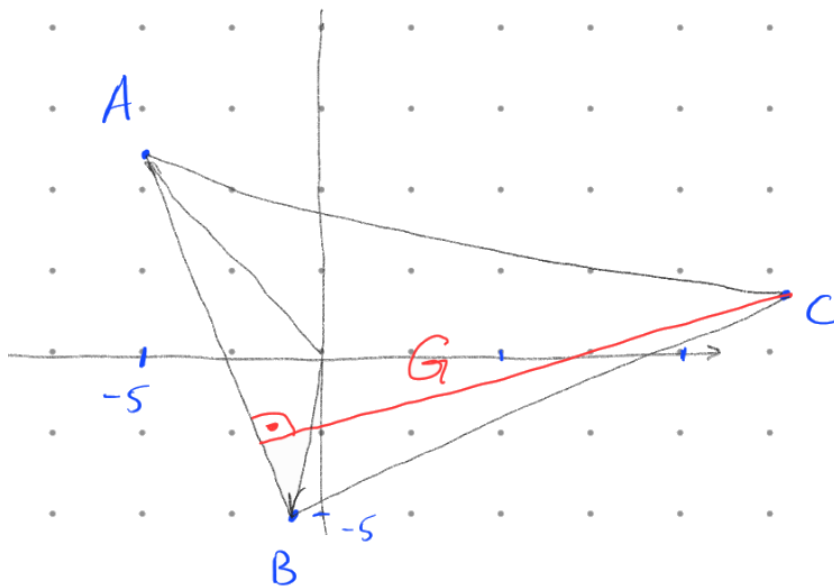
$$A = (-5, 7), \quad B = (-1, -5), \quad C = (13, 3).$$

- a) Zeige, dass die Höhe durch den Punkt C die Gleichung

$$x - 3y = 4$$

hat.

- b) Bestimme die Gleichung der Seitenhalbierenden durch den Punkt B.
- c) Bestimme den Schnittpunkt der Geraden aus Teil (a) und Teil (b).
- d) Bestimme die Fläche des Dreiecks Δ .



◁

Lösung. a) Wir zeigen, dass die Gerade

$$G : x - 3y = 4$$

die Höhe des Dreiecks durch den Punkt C ist.

Dazu müssen zwei Dinge überprüft werden:

- (i) Der Punkt C liegt auf der Geraden G.
- (ii) Die Gerade G steht senkrecht auf der Seite $\overrightarrow{AB}$.

Zuerst setzen wir die Koordinaten von

$$C = (13, 3)$$

in die Gleichung von G ein:

$$13 - 3 \cdot 3 = 13 - 9 = 4.$$

Damit erfüllt C die Gleichung der Geraden. Also gilt

$$C \in G.$$

Nun zeigen wir, dass G senkrecht auf der Seite $\overrightarrow{AB}$ steht. Dafür berechnen wir den Richtungsvektor der Seite $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Die Gerade G hat die Gleichung

$$x - 3y = 4.$$

Ein Normalenvektor von G ist daher

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 4n.$$

Also ist $\overrightarrow{AB}$ ein Vielfaches des Normalenvektors von G .

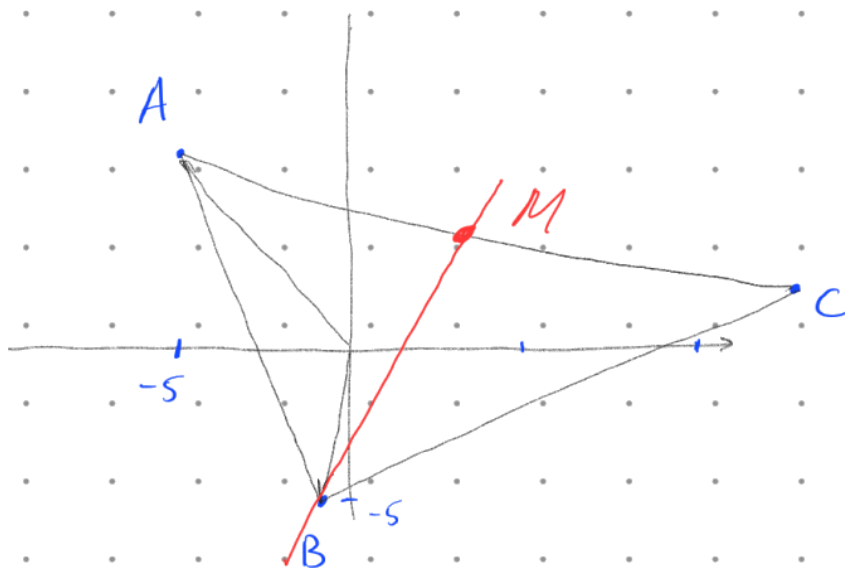
Damit ist die Seite $\overrightarrow{AB}$ senkrecht zur Geraden G . Da außerdem C auf G liegt, ist G die Höhe des Dreiecks durch den Punkt C .

Also hat die Höhe durch C die Gleichung

$$x - 3y = 4.$$

b) Wir bestimmen die Gleichung der Seitenhalbierenden durch den Punkt B .

Die Seitenhalbierende durch B verläuft durch den Punkt B und durch den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite $\overrightarrow{AC}$. Sei also M der Mittelpunkt von $\overrightarrow{AC}$.



Zuerst berechnen wir den Mittelpunkt M von $A = (-5, 7)$ und $C = (13, 3)$:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$M = (4, 5).$$

Die gesuchte Seitenhalbierende ist die Gerade durch die Punkte $B = (-1, -5)$ und $M = (4, 5)$. Ein Richtungsvektor dieser Geraden ist

$$\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir zunächst die Parameterdarstellung

$$G_2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Nun formen wir diese Gerade in eine Koordinatengleichung um. Ein Normalenvektor der Geraden muss senkrecht auf dem Richtungsvektor

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

stehen. Ein solcher Normalenvektor ist

$$n = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

denn

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 10 = 0.$$

Die Koordinatengleichung hat also die Form

$$2x - y = d.$$

Da der Punkt $M = (4, 5)$ auf der Geraden liegt, setzen wir ihn ein:

$$d = 2 \cdot 4 - 5 = 8 - 5 = 3.$$

Damit lautet die Gleichung der Seitenhalbierenden durch B

$$G_2: 2x - y = 3.$$

- c) Wir bestimmen den Schnittpunkt der beiden Geraden aus Teil (a) und Teil (b).

Aus den vorherigen Teilaufgaben kennen wir die Geraden

$$G: x - 3y = 4$$

und

$$G_2: 2x - y = 3.$$

Gesucht ist der Punkt, der auf beiden Geraden liegt. Dazu lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x - 3y = 4, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Wir formen die zweite Gleichung so um, dass wir sie gut mit der ersten Gleichung kombinieren können. Dazu multiplizieren wir die erste Gleichung mit -2 :

$$\begin{cases} -2x + 6y = -8, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Nun addieren wir beide Gleichungen:

$$5y = -5.$$

Also gilt

$$y = -1.$$

Diesen Wert setzen wir in die erste Gleichung ein:

$$x - 3 \cdot (-1) = 4.$$

Damit folgt

$$x + 3 = 4$$

und somit

$$x = 1.$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist also

$$G \cap G_2 = \{(1, -1)\}.$$

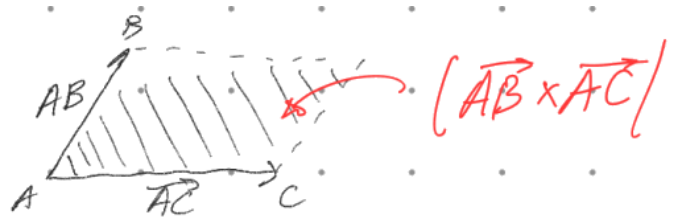
d) Wir bestimmen die Fläche des Dreiecks Δ .

Die Fläche eines Dreiecks ist die Hälfte der Fläche des zugehörigen Parallelogramms. Mit zwei Seitenvektoren des Dreiecks gilt daher

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|.$$

Zuerst berechnen wir die beiden Vektoren:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$$



und

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Für das Kreuzprodukt schreiben wir die Vektoren als Vektoren im $\mathbb{R}^3$, indem wir als dritte Koordinate jeweils 0 ergänzen:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 18 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 18 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \cdot (-4) - (-12) \cdot 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 200 = 100.$$

Die Fläche des Dreiecks beträgt also

$$F_{\Delta} = 100.$$

□

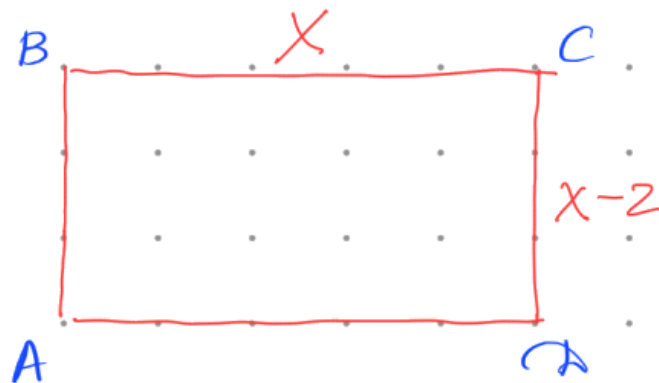
(1.3) Beispiel. Das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck. Eine Seite ist x cm groß und die andere ist 2 cm kleiner.

Welche Werte kann x annehmen, wenn der Flächeninhalt des Rechtecks kleiner als 15 cm^2 sein soll?

◁

Lösung. Der Flächeninhalt eines Rechtecks berechnet sich aus

$$F = \text{Länge} \cdot \text{Breite}.$$



Hier sind die Seitenlängen x und $x - 2$. Also gilt

$$F = x \cdot (x - 2).$$

Da der Flächeninhalt kleiner als 15 cm^2 sein soll, erhalten wir die Ungleichung

$$x(x - 2) < 15.$$

Wir lösen diese Ungleichung:

$$\begin{aligned} x(x - 2) &< 15 \\ x^2 - 2x &< 15 \\ x^2 - 2x - 15 &< 0. \end{aligned}$$

Zunächst bestimmen wir die Nullstellen der zugehörigen quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

Mit der Mitternachtsformel erhalten wir

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}.$$

Also gilt

$$x_1 = 5 \quad \text{und} \quad x_2 = -3.$$

Damit können wir faktorisieren:

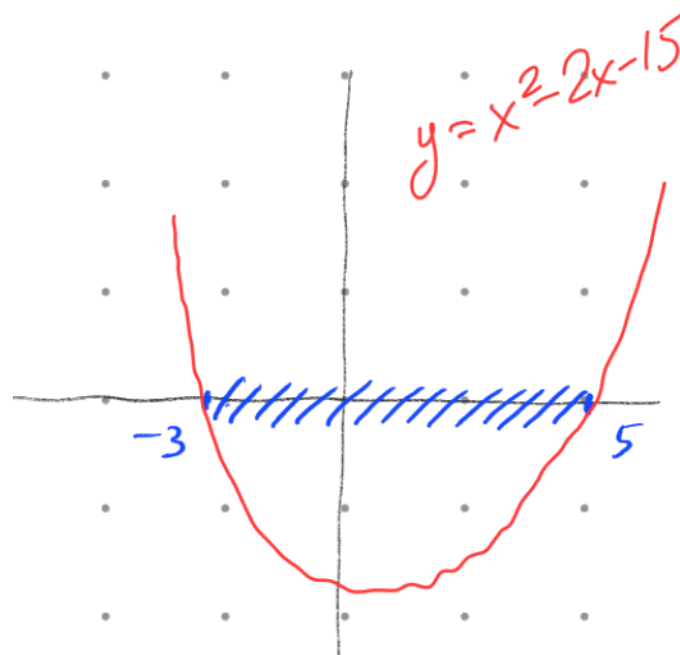
$$x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3).$$

Die Parabel ist nach oben geöffnet. Deshalb ist

$$x^2 - 2x - 15 < 0$$

genau zwischen den beiden Nullstellen erfüllt:

$$-3 < x < 5.$$



Zusätzlich müssen die Seitenlängen des Rechtecks positiv sein. Es gilt

$$x > 0$$

und

$$x - 2 > 0.$$

Aus der zweiten Bedingung folgt

$$x > 2.$$

Zusammen mit

$$-3 < x < 5$$

ergibt sich daher

$$2 < x < 5.$$

□